VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

INTEGRAL Y VISUALIZACIÓN

INTEGRAL AND VISUALIZATION

Agustín Grijalva Monteverde, María Teresa Dávila
Universidad de Sonora (México)
guty@gauss.mat.uson.mx, tere.davila.araiza@gmail.com

Resumen
Ante el predominio del lenguaje algebraico y algorítmico en la enseñanza de la integral de una función en cursos de cálculo, se producen significaciones limitadas que generan, por una parte, dificultades para su uso adecuado en la resolución de problemas de aplicación en las áreas de interés de los estudiantes, ya sean de ingeniería, economía u otras disciplinas, y por otra, altos índices de reprobación. En este trabajo se discute el diseño de actividades didácticas mediadas con GeoGebra para fortalecer el significado de la integral con tratamientos visuales, apoyados en las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS). Se presenta a detalle una de las actividades y se discuten sus posibles ventajas para el estudio de la integral.

Palabras clave: integral, visualización, geogebra

Abstract
Given the predominance of algebraic and algorithmic language when teaching the integral of a function in calculus courses, students develop limited meanings that generate, on the one hand, difficulties for its appropriate use in solving problems applied in the areas of students' interest, whether in engineering, economics or other disciplines; and on the other, high failure rates. In this paper, we present the design of GeoGebra-mediated teaching activities aimed to strengthen the meaning of the integral with visual treatments, supported by the theoretical tools of the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA). One of the activities is shown in detail, and its possible advantages to study the integral are discussed.

Key words: integral, visualization, geogebra

Introducción

La preponderancia del uso de las representaciones algebraicas, así como una enseñanza de las matemáticas que privilegia los procesos algorítmicos, se reportan hasta la actualidad en las revistas de docencia e investigación en matemática educativa, a pesar de que los medios digitales ofrecen posibilidades de análisis para el estudio de los objetos matemáticos que potencian el uso de diversos sistemas de representación semiótica, lo cual es particularmente válido en el cálculo diferencial e integral.

El uso casi exclusivo de las representaciones algebraicas y los procesos algorítmicos conduce a los estudiantes a desarrollar mecanismos de automatización y la búsqueda de procedimientos predeterminados que puedan aplicar para la solución de un problema o de una situación problema que se les presente. En el caso de la integral de una función, por ejemplo, como se reporta en Grijalva (2007), tenemos situaciones como las siguientes, presentadas a un grupo de estudiantes de nivel superior.

La siguiente es la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}+2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ -\sqrt{1-(x-3)^2}+2 & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$. Calcula el valor de $\int_0^4 fx)\,dx$

.

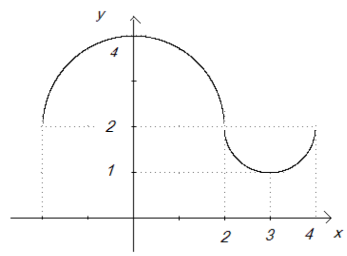

Figura 1. Gráfica de la función $f(x)$ presentada en la situación problema propuesta por Grijalva (2007)

Esta situación problema puede resolverse con facilidad determinando áreas, sin embargo, algunos alumnos trataron de resolverlo usando un procedimiento algorítmico muy extenso, obteniendo antiderivadas por medio del método de sustitución trigonométrica y evaluando en los extremos de la integral. Es importante resaltar que los estudiantes habían manifestado conocer la noción de que la integral es "el área bajo la curva", expresión que se usa para ilustrar o caracterizar a la integral como la medida del área, pero prefirieron usar un camino evidentemente más complejo.

Por otra parte, la ejemplificación de que la integral es el "área bajo la curva" se ilustra frecuentemente sólo con el caso de funciones positivas y la concepción que se forman de ello los estudiantes no necesariamente es la pretendida por los profesores. Así, en el siguiente caso se pone de manifiesto que la interpretación puede ser diferente (Figura 2).

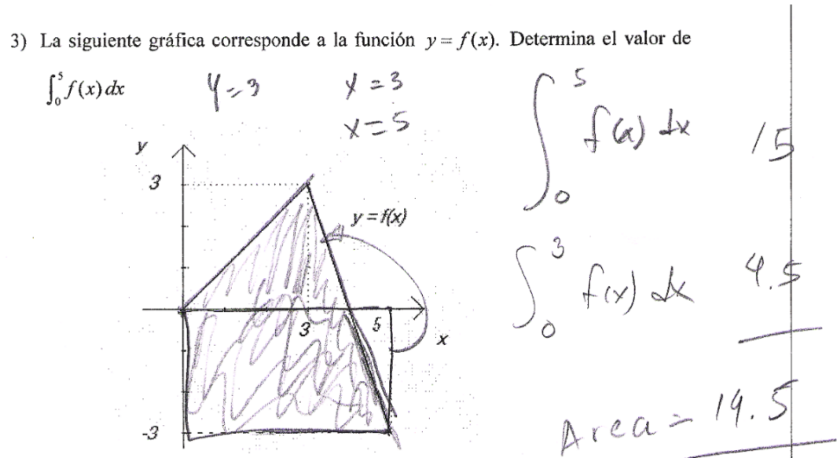

Figura 2. Interpretación de la integral como "área bajo la curva" de un estudiante (Grijalva, 2007)

Al cuestionar al estudiante sobre su respuesta, manifestó que realizó ese cálculo para obtener su valor, con la interpretación de área bajo la curva como se ilustra en la Figura 2.

Este tipo de respuestas ponen de manifiesto las interpretaciones limitadas que desarrollan los alumnos en los cursos de cálculo, y dan cuenta de diferentes tipos de dificultades en el aprendizaje, algunas de ellas, por un lado, ocasionadas por el predominio de los procesos algorítmicos. Por otro lado, se tienen las dificultades asociadas a la idea de área bajo la curva. Desde nuestro punto de vista, se da una interpretación errónea cuando se habla de la integral como área bajo la curva, ilustrando esta idea sólo con el caso de funciones positivas, sin presentar otros casos ni hacer mayores análisis de carácter conceptual.

Estas experiencias nos motivaron a diseñar y llevar a la práctica propuestas para el tratamiento del cálculo diferencial e integral con apoyo en los procesos de visualización y el uso de diferentes registros de representación semiótica (Duval, 2017). La propuesta se desarrolla usando el software GeoGebra, con el que se potencian las posibilidades del registro geométrico.

Estas experiencias nos motivaron a diseñar y llevar a la práctica propuestas para el tratamiento del cálculo diferencial e integral con apoyo en los procesos de visualización y el uso de diferentes registros de representación semiótica (Duval, 2017). En este escrito, específicamente, discutiremos algunas de las actividades didácticas diseñadas para el estudio de la integral de una función, las cuales tienen como objetivo fortalecer el significado de este objeto matemático, proveyendo de situaciones diversas, en las que se privilegian los aspectos visuales como complemento de los análisis conceptuales y algorítmicos de la integral. Las actividades propuestas se desarrollan con la mediación del software libre de matemáticas dinámicas GeoGebra, con el cual se potencian las posibilidades del registro geométrico.

Hemos tenido en cuenta la importancia del papel que juega la tecnología en estos tratamientos, pues como señala Goldin (1998), en el siguiente párrafo de traducción libre "La tecnología informática ha avanzado para permitir la estructuración intencional de entornos matemáticos altamente complejos ('micromundos'), donde las configuraciones ya no son estáticas como las producciones de lápiz y papel, sino dinámicas. Esto hace que los análisis de los sistemas de representación externos sean aún más importantes. Debemos considerar no sólo la estructura de fondo, sino la estructura representativa, si queremos entender cómo cambian las cogniciones humanas al interactuar con tales entornos".

Elementos teóricos

El diseño de las actividades se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, EOS, (Godino, Batanero y Font, 2008), en el cual se pone al centro la noción de *práctica matemática*, entendida como toda actuación o expresión que se usa para resolver problemas, validar la solución, generalizarla o comunicarla. En el EOS se asume que, más importante que las prácticas matemáticas aisladas, es necesario considerar los sistemas de prácticas que se emplean al resolver un mismo tipo de situaciones problema.

En la realización de sistemas de prácticas matemáticas emergen diferentes entes matemáticos, a los cuales identificamos como *objetos matemáticos primarios* y distinguimos seis tipos: las situaciones problema, los lenguajes, los procedimientos, las propiedades, los argumentos y los conceptos, de tal suerte que cada objeto matemático puede ser uno de éstos o una combinación de los mismos.

Por otra parte, toda vez que la única forma de acceder a las significaciones que cada sujeto asigna a los objetos matemáticos es a través de sus prácticas discursivas u operatorias (lo que cada sujeto dice o hace), asumimos que los sistemas de prácticas son el significado mismo del objeto matemático y los objetos matemáticos primarios son los constituyentes de dicho significado.

Pero, ante diferentes situaciones problema, es posible desarrollar diferentes sistemas de prácticas que producen un mismo objeto matemático, generando significaciones parciales del mismo, que en su conjunto producen el significado total o significado holístico. Por ejemplo, independientemente de si se obtuvo una respuesta correcta o no, en el caso de las situaciones ilustradas al inicio con respecto a la integral, en un ejercicio surgió el significado de la integral como el cálculo de la evaluación en los extremos de una antiderivada y, en el segundo caso, la determinación de la integral por medio del cálculo del área de una región. Ambas significaciones refieren a un mismo objeto matemático, la integral de una función, pero a partir de sistemas de prácticas diferentes.

Consecuentemente, los sistemas de prácticas se desarrollan usando diferentes procedimientos y representaciones de los objetos. Siguiendo una idea general de visualización, consistente en la formación de imágenes mentales a partir de ideas que en principio “no se ven”, es posible que, por ejemplo, ante la expresión analítica $y = x^2$, visualicemos una parábola en un sistema cartesiano, con vértice en el origen y cóncava haca arriba. Sin embargo, es posible que otro sujeto asocie la expresión $y = x^2$ con un polinomio, con una función cuadrática o simplemente la considere una expresión matemática sin un sentido particular, incluso puede no significar nada, como en el caso de un niño. Para que una expresión de esta naturaleza signifique algo, se requiere que sea un “signo”, esto es, que le representa algo. Estas consideraciones nos conducen a reforzar la idea de que la visualización requiere de la habilidad para el uso de diferentes representaciones de los objetos matemáticos y la conversión entre dichas representaciones.

Un antecedente importante lo encontramos en los trabajos de Peirce (1966) sobre el surgimiento de los signos sociales (como los visuales), y también trabajos posteriores como Peirce (1988). Asumimos que los grupos sociales estructuran los signos como códigos en torno a reglas expresadas explícitamente o aceptadas implícitamente.

Un primer punto a resaltar es la consideración de que todo signo tiene cuatro condiciones fundamentales. Por una parte, todo signo posee una condición representativa, es decir, todo signo está dirigido hacia algo, se refiere a algún objeto o lo representa. Asimismo, todo signo ostenta una condición presentativa, pues tiene una función, es decir, todo signo muestra alguna relación entre el objeto y la representación. Por otra parte, todo signo manifiesta una función interpretativa, pues sin sujeto interpretante no existe el signo. Por último, el signo presenta una condición triádica, referida al propio signo, al objeto y al sujeto interpretante. Así, tenemos que el signo es *algo* que se pone por *algo*, en *alguna relación* y para *alguien*.

Cuando se presentan estas tres condiciones o características, de que una grafía, gesto, imagen, etc. se pone por algo, en alguna relación y para alguien, podemos hablar del surgimiento del signo. Peirce (1986) habla de tres tipos de signos:

- Icono: Tienen una relación de semejanza, directa, con el objeto que representan. Por ejemplo: pinturas, retratos, mapas.
- Índice: La relación con los objetos que representan es de contigüidad (relación de causa-efecto). Por ejemplo, un rayo (es índice de tormenta).
- Símbolo: Representa al objeto designado en virtud de un hábito o regla que es independiente de cualquier cualidad física, o contigüidad contextual con el objeto. Ejemplo: palabras, logotipos, señales de tráfico.

El caso de las matemáticas es particularmente especial pues las expresiones matemáticas suelen combinar los tres tipos de signo, "en las expresiones algebraicas encontramos la imbricación de los tres tipos de signos en la escritura matemática: las letras funcionan como índices, los signos de las operaciones, igualdad, desigualdad, etc. son símbolos, mientras las expresiones como un todo funcionan como un icono" (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 47).

En el caso de la expresión x^2 de la que hablamos con anterioridad, con los mismos caracteres podemos también escribir expresiones como $2x$ o x_2 y, en cada caso, se representan diferentes objetos, pues podemos afirmar que cada expresión en su conjunto es icónica de una parábola, una recta y el término de una sucesión, respectivamente. Las posiciones relativas de 2 y x simbolizan aspectos diferentes, en este caso, un exponente, un coeficiente y el lugar de un término en una sucesión.

En lo que respecta al objeto matemático de nuestro interés en este trabajo, la integral de una función, tenemos que en la expresión $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, tomada en su totalidad, informa de las propiedades esenciales de la función integral, actuando como icono. Pero las letras x, a y t, tomadas de forma aislada indican magnitudes, esto es, actúan como índices, cada una de ellas indica una cantidad. Por su parte el signo "=" y las posiciones de a y x son símbolos en el sentido de Peirce, pues representan un acuerdo o regla que relaciona objetos entre sí.

Esta forma de concebir a los signos nos lleva a considerar que las representaciones semióticas y la visualización pueden referirse en general a las expresiones analíticas, a las representaciones numéricas, a las representaciones geométricas y otras, pero en este trabajo, interesados en los procesos de visualización, la intención al referirnos a los mismos, nos conduce a restringirnos al estudio de los "objetos visuales", pues asumimos, como señala Arcavi (1999) citado en Oropeza y Lezama (2008) : "La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento" (p. 25).

Consecuentemente los procesos de visualización están indisolublemente unidos a los procesos de representación y, para la visualización se requiere el desarrollo de habilidades para convertir información de un sistema semiótico de representación a otro. Sin soslayar este hecho, en este trabajo pondremos énfasis en usar y analizar el papel que juegan las imágenes o, más apropiadamente "los objetos visuales" asociados a las representaciones geométricas usadas.

Sin embargo, reconociendo la importancia de planteamientos como los de Peirce respecto a los signos, es pertinente contar con herramientas de análisis, tanto para el diseño de actividades como para la interpretación de los impactos en el aprendizaje de los alumnos, que permitan comprender los procesos involucrados de forma más integral. Partimos de que, como se establece en general en el EOS y que aquí aplicamos para los objetos visuales, éstos se articulan en configuraciones de objetos y procesos. En este caso las configuraciones de interés se establecen entre las situaciones problema visuales, el uso del lenguaje visual, de los procedimientos visuales, las propiedades visuales, los argumentos visuales y los conceptos visuales involucrados en el estudio de la integral.

Dado que, para la visualización, aunque nos centremos en los objetos visuales, se requiere de la conversión entre representaciones, seguimos la idea de Godino et al. (2012, p. 113) respecto a que "Usualmente los objetos visuales participarán en las prácticas matemáticas junto con otros objetos no visuales (analíticos o de otro tipo). La visualización en matemáticas no se reduce a ver, sino que también conlleva interpretación, acción y relación".

Con base en estas consideraciones teóricas generales, nos proponemos desarrollar actividades para la enseñanza de la integral con apoyo en el software GeoGebra, potenciando el uso de objetos visuales en el estudio de la integral de una función y su interrelación con las formas analíticas que tradicionalmente se estudian en los textos y cursos de cálculo diferencial e integral.

La organización de las actividades didácticas se orienta con base en la noción de *idoneidad didáctica* del EOS (Godino, 2013), la cual se concibe como la articulación sistémica de seis idoneidades que atienden distintas dimensiones involucradas en los procesos de instrucción matemáticos:

- *Idoneidad epistémica*: grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*: grado en que los significados pretendidos/ implementados se encuentran dentro de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- *Idoneidad interaccional*: grado en el que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten identificar conflictos semióticos (discrepancia de significados entre sujetos) potenciales y la posibilidad de resolverlos durante el desarrollo de las actividades didácticas.
- *Idoneidad mediacional*: grado en el cual se adecúan los recursos existentes, tanto materiales como los de disposición de tiempo.
- *Idoneidad afectiva*: grado de interés y motivación del alumno con las situaciones problema planteadas y las tareas asignadas en el proceso de enseñanza.
- *Idoneidad ecológica*: grado en que el proceso de estudio se corresponde con el entorno, tanto curricular del curso específico, como del uso de los conocimientos matemáticos en otras asignaturas, sean de matemáticas o no, en situaciones extraescolares y otras.

El diseño didáctico

El diseño didáctico que elaboramos para abordar el estudio de la integral incluye, entre sus actividades, algunas enfocadas en las propiedades más elementales de la integral definida que suelen estudiarse en un curso de cálculo integral, con el propósito de enriquecer la noción misma de integral. Una de estas actividades es la que discutiremos en la siguiente sección. Este diseño abarca también la elaboración de applets de GeoGebra adaptados a los propósitos didácticos de cada actividad, considerando que la tecnología digital facilita la atención de casos y características visuales que no siempre se atienden en los cursos de cálculo: funciones negativas, funciones definidas en intervalos donde toman valores positivos y negativos, funciones crecientes y/o decrecientes, funciones continuas, funciones discontinuas, etc. La aplicación de las actividades didácticas se encuentra en fase preliminar y aún no se cuenta con resultados de investigación sobre su impacto en el aprendizaje.

Las figuras 3 y 4 corresponden a los applets diseñados para algunas de las actividades de la propuesta. Se pueden observar elementos visuales variables que permiten procesos de generalización de resultados: se puede cambiar la función, el intervalo, el orden de los límites de integración, la cantidad n de rectángulos, etc.

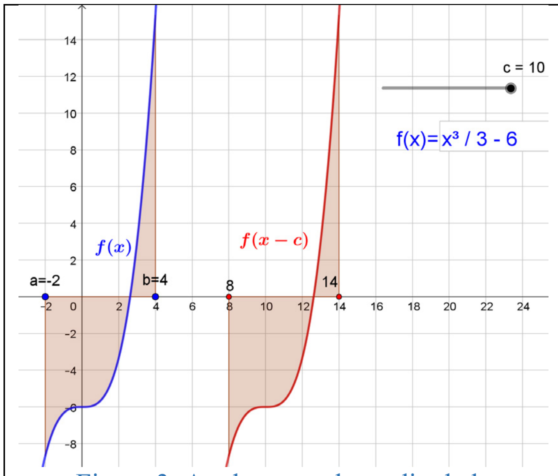

Figura 3. Applet para el estudio de la propiedad representada algebraicamente como $\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = \int_b^a f(x-c)\,dx$

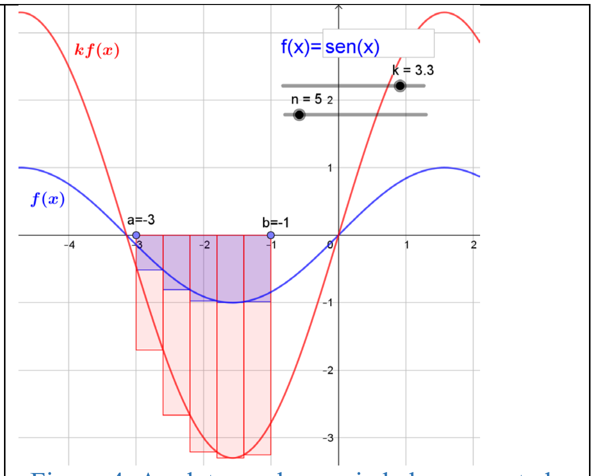

Figura 4. Applet para la propiedad representada algebraicamente como $\int_b^a kf(x)\,dx = k\int_b^a f(x)\,dx$

En la siguiente sección discutiremos la actividad correspondiente a la Figura 4, mostrando los objetos matemáticos primarios visuales que juegan un papel en la realización de las prácticas matemáticas promovidas en la actividad. Discutiremos, además, cómo la noción de idoneidad didáctica juega un papel central en el diseño de la actividad, tomando como ejemplo, por cuestiones de espacio, la idoneidad epistémica. Para ello, nos apoyaremos en una serie de descriptores de la idoneidad epistémica propuestos por el EOS (Tabla 1).

Tabla 1. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica (Grijalva e Ibarra, 2017)

Componente	Indicadores				
Situaciones problema	Contextualización	Ejercitación	Aplicación	Problematización	
Lenguajes	Verbal	Gráfico	Tabular	Expresión analítica	
Reglas: definiciones proposiciones procedimientos	Claros	Correctos	Adaptación al nivel educativo	Enunciados fundamentales al nivel educativo	Generar o negociar definiciones, proposiciones y procedimientos
Argumentos	Explicaciones, comprobaciones y demostraciones adecuadas al nivel educativo	Promoción de situaciones para argumentar			

Relaciones	Entre los objetos matemáticos	Identificación de significados de los objetos intervinientes	Articulación de significados de los objetos intervinien-tes		

Actividad didáctica para la propiedad $\int_b^a kf(x)\,dx = k\int_b^a f(x)\,dx$

En el libro de Leithold (1998) se presenta como teorema la siguiente propiedad de la integral definida: "Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$, y si k es cualquier constante, entonces $\int_b^a kf(x)\,dx = k\int_b^a f(x)\,dx$" (p. 347). En este libro, la demostración de este teorema descansa sobre la definición analítica de integral definida como suma de Riemann y en propiedades de la suma, sin embargo, no se toma en cuenta la importancia de procesos de visualización en el desarrollo de significado para esta propiedad de la integral definida, para que no quede reducida a un simple procedimiento como "sacar la constante de la integral".

Consideramos que alrededor de esta propiedad de la integral definida se pueden promover diferentes prácticas matemáticas visuales que constituyan un significado más rico de la propiedad enunciada, así como de la integral definida. En este sentido, para la resolución de situaciones problema como estas: *¿Qué relación se puede establecer entre $\int_b^a f(x)\,dx$ y $\int_b^a kf(x)\,dx$? ¿Qué puedes afirmar en cuanto a $\int_b^a kf(x)\,dx$ y $k\int_b^a f(x)\,dx$?*, la actividad didáctica que proponemos promueve el desarrollo de diferentes prácticas matemáticas visuales, como las siguientes:

- Operar gráficamente con funciones, por ejemplo, multiplicar una función por una constante.
- Realizar aproximaciones sucesivas, por medio de una cantidad cada vez mayor de rectángulos, al área de una región delimitada por el eje x, la gráfica de la función $f(x)$, las rectas $x = a$ y $x = b$.
- Elaborar conjeturas empleando una función específica, una constante específica y un intervalo específico.
- Comprobar las conjeturas variando elementos visuales de la construcción gráfica, como: el intervalo $[a,b]$, la función f, la cantidad n de rectángulos y el valor de la constante k.

Las situaciones problema planteadas, presentadas gráficamente, y no solo en el lenguaje algebraico, constituyen situaciones problema de contextualización geométrica. Además, la posibilidad de trabajar con diferentes funciones, intervalos y valores de la constante k favorece la ejercitación y aplicación de los resultados obtenidos y las conjeturas establecidas, así como la problematización (surgimiento de nuevas situaciones problema como: ¿qué pasa si la función es negativa, qué pasa si k es negativo?, etc.), atendiendo a los indicadores de la Tabla 1.

Por otro lado, la realización de las prácticas matemáticas enlistadas arriba involucra diferentes objetos matemáticos primarios visuales y no visuales: situaciones problema, lenguajes, conceptos/definiciones, procedimientos, proposiciones/propiedades y argumentos.

Situaciones problema. Se plantean las siguientes situaciones ¿Qué relación encuentras entre $\int_b^a f(x)\,dx$ y $\int_b^a kf(x)\,dx$? ¿Qué puedes afirmar en cuanto a $\int_b^a kf(x)\,dx$ y $k\int_b^a f(x)\,dx$? Se guía al estudiante para que aborde las situaciones problema de manera gráfica, explorando con funciones, intervalos, cantidad de rectángulos y valores de la constante k específicos, a través de la comparación (cualitativa y cuantitativa) de las áreas de rectángulos con alturas dadas por f y kf para mismos valores de x (Figura 5).

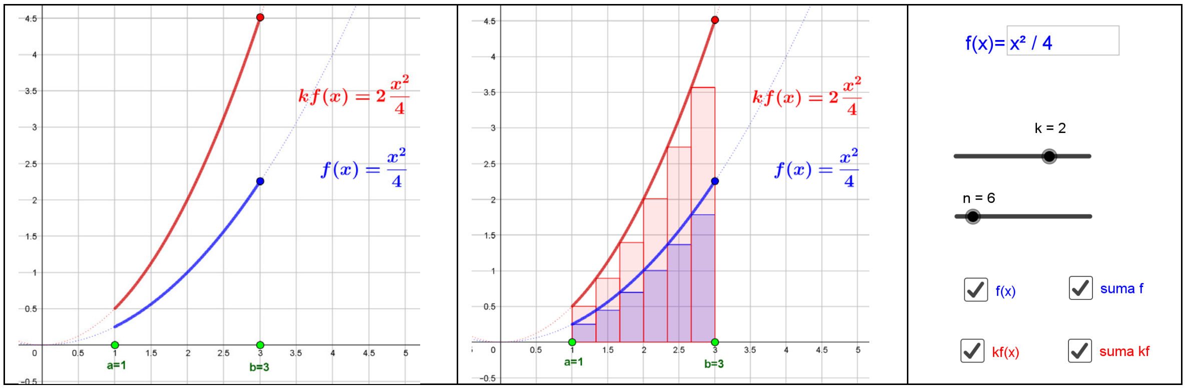

Figura 5. Comparación de áreas de rectángulos correspondientes a las funciones f y kf en el lenguaje gráfico con la mediación del applet de GeoGebra.

Lenguaje. Esta exploración implica, a su vez, que el estudiante establezca relaciones entre el leguaje gráfico y el algebraico, por ejemplo:

- La expresión analítica de la función f se asocia con la curva mostrada en GeoGebra.
- La expresión analítica $\int_b^a f(x)\,dx$ se relaciona con el área de una región limitada por la gráfica de f, $x = a$, $x = b$, y el eje x, pero distinguiendo cuándo el área y la integral coinciden (si f es positiva en $[a, b]$) y cuándo no.
- El intervalo $[a, b]$ se asocia con el segmento comprendido entre a y b sobre el eje x.

Procedimientos. Como procedimientos visuales, se promueve:

- La multiplicación de una función por una constante, la que gráficamente conduce a una contracción o a un estiramiento.
- Comparar visualmente el área de rectángulos correspondientes, de altura f y kf, respectivamente, para conjeturar que el área de uno de ellos es proporcional al área del otro, de manera que se pueda establecer una conjetura sobre la proporcionalidad de la suma de las áreas de los rectángulos correspondientes a cada función y, posteriormente, una conjetura sobre la proporcionalidad en el valor de las integrales definidas de f y kf.

Como procedimientos no visuales, se requiere:

- La multiplicación de una función por una constante en el lenguaje analítico.
- Calcular numéricamente el área de un rectángulo (fijo, y también de uno arbitrario) con altura dada por $f(x)$ o por $kf(x)$.
- Calcular antiderivadas algebraicamente.

Conceptos. Los conceptos visuales involucrados en la actividad son emergentes de actividades previas, como:

- Integral entendida como el área de la región delimitada en un intervalo por la gráfica de la función f y el eje x, cuando f es positiva en el intervalo.
- Integral como el inverso aditivo del área de la región delimitada en un intervalo por la gráfica de la función f y el eje x cuando f es negativa en el intervalo.

También se requieren algunos conceptos no visuales, como el de integral entendida como función y como antiderivada.

Propiedades. A través de la exploración guiada en el applet de GeoGebra, se favorece la emergencia de propiedades de la integral definida como las siguientes:

- Visualmente, el área correspondiente a $\int_b^a f(x)\,dx$ es mayor o menor que $\int_b^a kf(x)\,dx$ de pendiendo del valor de k.
- El área de cualquier rectángulo de altura $kf(x)$ es proporcional al rectángulo correspondiente de altura $f(x)$.

Por otro lado, se requiere que en las actividades previas hayan emergido propiedades de la integral definida como las siguientes:

- El área de la región delimitada, en un intervalo cerrado, por la gráfica de la función f y el eje x se puede aproximar, tanto como se quiera, mediante la suma del área de rectángulos cuya altura es un valor de la función, haciendo la cantidad de rectángulos cada vez más grande.
- Tanto la suma superior y la suma inferior (así como suma izquierda y derecha) de áreas de rectángulos aproximan el área de la región de interés.

Argumentos. Los argumentos se pueden basar en las propiedades visuales, así como en los cálculos realizados en el lenguaje algebraico. Además, pueden ser inductivos al variar la función, la constante k, la cantidad n de rectángulos para probar la generalidad de los resultados.

Conclusiones

Como se ha mostrado en el trabajo, la promoción de los procesos de visualización no es espontánea ni surge de manera natural. Es necesario entrenarse en el tratamiento para la formación de imágenes adecuadas y la interpretación de la información que se presenta por medio de objetos visuales.

Por otra parte, el aprendizaje de las matemáticas, así como no se pude reducir al manejo del registro algebraico o analítico y su consecuente algoritmia, tampoco se puede quedar en el nivel visual, por lo cual para la visualización es imprescindible desarrollar habilidades para la conversión entre registros de representación, articulando los objetos visuales entre sí y con los objetos no visuales inherentes a los procesos matemáticos.

Por último, se tiene proyectado aplicar los diseños con estudiantes de ingeniería y con base en los resultados obtenidos se podrán establecer conclusiones generales sobre el desarrollo de habilidades de visualización de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking —The Registers of Semiotic Representations. doi: 10.1007/978-3-319-56910-9.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Godino, J. D. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 30*(2), 109-130.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *10,* 7-37.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. The Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 137-165.

Grijalva, A. (2007). *El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, U. Legaria, México.

Grijalva, A. e Ibarra, S. (2017). Una experiencia de diseño de actividades de enseñanza con base en los criterios de idoneidad didáctica. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.) *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Oropeza, C. y Lezama, J. (2008). La visualización, como estrategia de estudio en el concepto de dependencia e independencia lineal. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *21*, 23-31.

Peirce, C. S. (1966). *Collected papers of Charles Sanders Peirce* (vols. 1-2). Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press.

Peirce, C. S. (1986). *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Nueva Visión.

Peirce, C. S. y Vericat José. (1988). *El hombre, un signo (el pragmatismo de Peirce)*. España: Editorial Crítica.